



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Nehomogenní soustava rovnic

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Zadání:

Zopakujme si:

A matice soustavy, A_r matice soustavy rozšířená, n počet neznámých x_i

Nehomogenní soustava rovnic je řešitelná pokud platí

$$h(A) = h(A_r)$$

Počet řešení nehomogenní soustavy rovnic

- $h(A) = n$ soustava má jedno řešení
- $h(A) < n$ soustava má nekonečně mnoho řešení počet parametrů je $n - h(A)$

Metody řešení soustavy rovnic

- Neúplná eliminační metoda (Gaussova)
- Úplná eliminační metoda (Jordanova)

Řešením soustavy

je uspořádaná n -tice $[x_1; x_2; \dots \dots x_n]$

Řešte soustavu rovnic v R :

$$\begin{aligned} 1. \quad & x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12 \\ & 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\ & 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ & 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -8 \\ & 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \\ & 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ & 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ & x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4 \end{aligned}$$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Výsledky:

1. $[1; -1; 0; 2]$
2. soustava nemá řešení
3. $[-3 + 3t; 3 - 2t; t; 1]$

Řešení:

1. Soustavu rovnic zapíšeme do schématu (ukázka obou způsobů řešení):

a. Neúplná eliminační metoda

x_1	x_2	x_3	x_4	b	poznámky
1	3	5	7	12	zvolíme klíčový řádek , který se nemění a píšeme ho jako první
3	5	7	1	0	
5	7	1	3	4	
7	1	3	5	16	
1	3	5	7	12	ve sloupci pod prvním prvkem řádku 1 potřebujeme samé 0 řádek přičteme k (-3) násobku prvního (klíčového) řádku řádek přičteme k (-5) násobku prvního (klíčového) řádku řádek přičteme k (-7) násobku prvního (klíčového) řádku
3	5	7	1	0	
5	7	1	3	4	
7	1	3	5	16	
1	3	5	7	12	řádek vydělíme (-4) řádek vydělíme (-8) řádek vydělíme (-4)
0	-4	-8	-20	-36	
0	-8	-24	-32	-56	
0	-20	-32	-44	-68	
1	3	5	7	12	řádek opíšeme a pod ním zvolíme klíčový řádek , který opíšeme ve sloupci pod druhým prvkem řádku 1 potřebujeme samé 0 řádek přičteme k (-1) násobku druhého (klíčového) řádku řádek přičteme k (-5) násobku druhého (klíčového) řádku
0	1	2	5	9	
0	1	3	4	7	
0	5	8	11	17	

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

1	3	5	7	12	matici soustavy jsme převedli na schodovitý tvar
0	1	2	5	9	řádek opíšeme a pod ním zvolíme klíčový řádek , který opíšeme
0	0	1	-1	-2	ve sloupci pod třetím prvkem řádku 1 potřebujeme samé 0
0	0	-2	-14	-28	řádek vydělíme 2 a přičteme ke třetímu (klíčovému) řádku
1	3	5	7	12	matici soustavy jsme převedli na schodovitý tvar
0	1	2	5	9	$h(A) = h(A_r) = 4$ počet neznámých $n = 4$ tedy $h(A) = n = 4$
0	0	1	-1	-2	soustava má jedno řešení
0	0	0	-8	-16	postupně dosazujeme od posledního řádku
1	3	5	7	12	$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12 \rightarrow x_1 + 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 + 7 \cdot 2 = 12 \rightarrow x_1 = 1$
0	1	2	5	9	$x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 9 \rightarrow x_2 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 9 \rightarrow x_2 = -1$ †
0	0	1	-1	-2	$x_3 - x_4 = -2 \rightarrow x_3 - 2 = -2 \rightarrow x_3 = 0$ †
0	0	0	-8	-16	$-8x_4 = -16 \rightarrow x_4 = 2$ †

Závěr: Soustava má řešení **[1; -1; 0; 2]**

b. Úplná eliminační metoda

x_1	x_2	x_3	x_4	b	poznámky
1	3	5	7	12	zvolíme klíčový řádek , který se nemění a píšeme ho jako první
3	5	7	1	0	
5	7	1	3	4	
7	1	3	5	16	
1	3	5	7	12	ve sloupci pod prvním prvkem řádku 1 potřebujeme samé 0
3	5	7	1	0	řádek přičteme k (-3) násobku klíčového řádku
5	7	1	3	4	řádek přičteme k (-5) násobku klíčového řádku
7	1	3	5	16	řádek přičteme k (-7) násobku klíčového řádku
1	3	5	7	12	řádek vydělíme (-4)
0	-4	-8	-20	-36	
0	-8	-24	-32	-56	
0	-20	-32	-44	-68	

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

1	3	5	7	12	řádek přičteme k (-3) násobku klíčového řádku
0	1	2	5	9	zvolíme jiný klíčový řádek s prvkem 1
0	1	3	4	7	řádek přičteme k (-1) násobku klíčového řádku
0	5	8	11	17	řádek přičteme k (-5) násobku klíčového řádku
1	0	-1	-8	-15	řádek přičteme ke klíčovému řádku
0	1	2	5	9	řádek přičteme k (-2) násobku klíčového řádku
0	0	1	-1	-2	zvolíme jiný klíčový řádek s prvkem 1
0	0	-2	-14	-28	řádek vydělíme 2 a přičteme ke klíčovému řádku
1	0	0	-9	-17	řádek přičteme k 9 násobku klíčového řádku
0	1	0	7	13	řádek přičteme k (-7) násobku klíčového řádku
0	0	1	-1	-2	řádek přičteme ke klíčovému řádku
0	0	0	1	2	zvolíme jiný klíčový řádek s prvkem 1 , řádek jsme vydělili (-8)
1	0	0	0	1	$\rightarrow x_1 = 1$
0	1	0	0	-1	$\rightarrow x_2 = -1$
0	0	1	0	0	$\rightarrow x_3 = 0$
0	0	0	1	2	$\rightarrow x_4 = 2$

Úpravou matice vznikly **čtyři různé** jednotkové sloupcové vektory.

$h(A) = h(A_r) = 4$, počet neznámých $n = 4$, tedy $h(A) = n = 4 \rightarrow$ soustava má **jedno řešení**

Závěr: Soustava má řešení **[1; -1; 0; 2]**

2. Soustavu rovnic zapíšeme do schématu (řešení úplnou eliminační metodou)

x_1	x_2	x_3	x_4	b	poznámky
2	1	-1	1	-8	zvolíme klíčový řádek s prvkem 1 , který se nemění a opíšeme jej
5	1	-1	2	-1	řádek přičteme k (-1) násobku klíčového řádku
2	-1	1	-3	4	řádek přičteme ke klíčovému řádku
3	-2	2	-3	2	řádek přičteme ke 2 násobku klíčového řádku
2	1	-1	1	-8	řádek přičteme k (-1) násobku klíčového řádku
3	0	0	1	7	zvolíme jiný klíčový řádek s prvkem 1
4	0	0	-2	-4	řádek vydělíme 2 a přičteme ke klíčovému řádku
7	0	0	-1	-14	řádek přičteme k 3 násobku klíčového řádku

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

-1	1	-1	0	-15	řádek přičteme ke klíčovému řádku
3	0	0	1	7	řádek přičteme k (-3) násobku klíčovému řádku
1	0	0	0	1	zvolíme jiný klíčový řádek s prvkem 1 , řádek jsme vydělili 5
10	0	0	0	-7	řádek přičteme k (-10) násobku klíčovému řádku
0	1	-1	0	-14	$h(A) = 3$
0	0	0	1	4	$h(A_r) = 4$
1	0	0	0	1	$h(A) \neq h(A_r)$ soustava nemá řešení
0	0	0	0	-17	

Závěr: Soustava nemá řešení

3. Soustavu rovnic zapíšeme do schématu (řešení úplnou eliminační metodou)

x_1	x_2	x_3	x_4	b	poznámky
2	2	-2	1	1	řádek přičteme k (-2) násobku klíčovému řádku
1	2	1	-2	1	zvolíme klíčový řádek , který se nemění a píšeme ho jako první
3	4	-1	2	5	řádek přičteme k (-3) násobku klíčovému řádku
1	3	3	-2	4	řádek přičteme k (-1) násobku klíčovému řádku
0	-2	-4	5	-1	řádek přičteme ke 2 násobku klíčovému řádku
1	2	1	-2	1	řádek přičteme k (-2) násobku klíčovému řádku
0	-2	-4	8	2	řádek vydělíme 2 a přičteme ke klíčovému řádku
0	1	2	0	3	zvolíme jiný klíčový řádek s prvkem 1
0	0	0	1	1	zvolíme jiný klíčový řádek s prvkem 1 , řádek jsme vydělili 5
1	0	-3	-2	-5	řádek přičteme ke 2 násobku klíčovému řádku
0	0	0	4	4	řádek je 4 násobkem prvního řádku – vynecháme jej
0	1	2	0	3	řádek opíšeme (vyhovuje požadavku)
0	0	0	1	1	$\rightarrow x_4 = 1$
1	0	-3	0	-3	$\rightarrow x_1 - 3x_3 = -3 \rightarrow x_1 = 3x_3 - 3$
0	1	2	0	3	$\rightarrow x_2 + 2x_3 = 3 \rightarrow x_2 = 3 - 2x_3$

Úpravou matice vznikly **tři různé** jednotkové sloupcové vektory.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

$h(A) = h(A_r) = 3$, počet neznámých $n = 4$, tedy $h(A) < n \rightarrow$ soustava má **nekonečně mnoho** řešení

pro parametrický zápis je počet parametrů $4 - 3 = 1$

zvolíme vhodně parametr: $x_3 = t \rightarrow x_1 = 3t - 3 \quad x_2 = 3 - 2t \quad x_4 = 1$

Závěr: Soustava má nekonečně mnoho řešení: $[3t - 3; 3 - 2t; t; 1]$