



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Užití geometrické posloupnosti

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

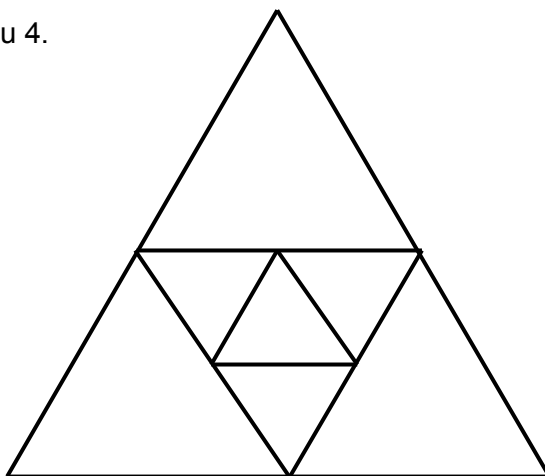
Zadání:

Pro řešení následujících příkladů využijte vlastností geometrické posloupnosti:

1. Bakterie se v příznivých podmínkách rozmnožují dělením tak, že po určité době z jedné bakterie vzniknou dvě. Doba dělení určitého druhu choroboplodných bakterií je 30 minut.
 - a. Kolik bakterií takto může vzniknout za 8 hodin z jediné bakterie?
 - b. Za kolik hodin by počet bakterií vzniklých z jediné bakterie přesáhl milion?
2. Světelný paprsek ztrácí při průchodu skleněnou deskou 5% své intenzity. Jaká je intenzita paprsku po průchodu pěti stejnými skleněnými deskami?
3. Historická úloha:

Kupec chtěl dát okovat koně. Kovář žádal tento způsob placení: „Na všechny podkovy potřebuji 24 hřebíků. Za první hřebík mi zaplatíš 1 halěr, za druhý 2 halěře, za třetí 4 halěře, vždy za každý další hřebík dvakrát tolik.“ Kupec radostně souhlasil, později toho však litoval. Kolik halěrů musel zaplatit jen za poslední hřebík?
4. Ozdoba vytvořená z drátku vznikla tak, že do rovnostranného trojúhelníku o straně 50 cm jsou postupně vkládány další trojúhelníky tak, že vrcholy nového trojúhelníku leží ve středech stran předcházejícího trojúhelníku. Do původního trojúhelníku bylo takto vloženo celkem dalších sedm trojúhelníků. Určete:
 - a. obvod šestého vloženého trojúhelníku s přesností na milimetry.
 - b. celkovou délku drátku na ozdobě s přesností na metry.

Obrázek k příkladu 4.



Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Výsledky:

1. a. 65 535 bakterií b. 10 hodin
2. 81,5%
3. 8 388 608 haléřů
4. a. 47 mm b. 3 m

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Řešení:

Pro výpočet neznámých hodnot využijeme vzorce:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

1.

a. $a_1 = 1$ bakterie, $a_2 = 2$ bakterie, $a_3 = 4$ bakterie $\rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = 2$

počet dělení: 16 (každou hodinu 2, tedy $2 \cdot 8$)

$$S_{16} = ?$$

Dosadíme do vzorce:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_{16} = 1 \cdot \frac{2^{16} - 1}{2 - 1}$$

$$S_{16} = 65\,535 \text{ bakterií}$$

Za 8 hodin může vzniknout 65 535 bakterií.

b. $a_1 = 1$ bakterie, $a_2 = 2$ bakterie, $a_3 = 4$ bakterie $\rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = 2$

$$S_n = 1\,000\,001 \text{ bakterií}$$

$$n = ?$$

Dosadíme do vzorce:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$1\,000\,001 = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$1\,000\,002 = 2^n$$

$$n = \frac{\log 1\,000\,002}{\log 2}$$

$$n \cong 20 \text{ dělení což je 10 hodin}$$

Počet bakterií přesáhne milion přibližně za 10 hodin.

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Helena Holečková

2. Jedná se o geometrickou posloupnost, pokles o 5% je vždy z momentální intenzity paprsku.

$$a_1 = 1 \text{ (100\%)}, a_2 = 1 - \frac{5}{100} = 0,95 \text{ (95\%)} \rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = 0,95$$

$$n = 5 \text{ (počet desek)}$$

Dosadíme do vzorce:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_5 = 1 \cdot 0,95^4 = 0,8145$$

$$a_5 \cong \mathbf{81,5\%}$$

Intenzita paprsku po průchodu pěti stejnými skleněnými deskami je přibližně 81,5%.

3. $a_1 = 1$ haléř, $a_2 = 2$ haléře, $a_3 = 4$ haléře $\rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = 2$

$$a_{24} = ? \text{ (poslední hřebík)}$$

Dosadíme do vzorce:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_{24} = 1 \cdot 2^{23} = \mathbf{8\,388\,608 \text{ haléřů}}$$

Za poslední hřebík zaplatí 8 388 608 haléřů.

4.

a. $a_1 = 50 \text{ cm} = 500 \text{ mm}$, $q = \frac{1}{2}$ (strana trojúhelníka se vždy zmenší na polovinu)

$a_6 = ?$ (délka strany trojúhelníka), obvod trojúhelníka $o = ?$

Dosadíme do vzorce:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_6 = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 15,625 \text{ mm}$$

$$o = 3 \cdot 15,625 = 46,875 \text{ mm} \cong \mathbf{47 \text{ mm}}$$

Obvod šestého vloženého trojúhelníku je přibližně 47 mm.

b. $a_1 = o_1 = 3 \cdot 50 = 150 \text{ cm}$, $a_2 = o_2 = 3 \cdot 25 = 75 \text{ cm} \rightarrow q = \frac{1}{2}$

$s_8 = ?$ (celkem osm trojúhelníků)

Dosadíme do vzorce:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s_8 = 150 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$s_8 = 298,828 \text{ cm} \cong \mathbf{3 \text{ m}}$$

Délka drátku tvořícího ozdobu je přibližně 3 metry.