



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Binomická věta

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Mgr. Helena Košťálová

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje  
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

## Zadání:

- 1) Umocněte dvojčlen podle binomické věty:  $(2a - 3b)^6 =$
- 2) Určete prostřední člen binomického rozvoje výrazu:  $(a - \sqrt[3]{a})^{12}$ .
- 3) Kolikátý člen binomického rozvoje výrazu  $\left(x^5 + \frac{2}{x^2}\right)^7$  neobsahuje x?
- 4) Určete koeficient 6. členu rozvoje výrazu  $\left(a^3 - \frac{3}{a}\right)^9$ .

Výsledky: 1)  $64.a^6 - 576.a^5.b + 2\,160.a^4.b^2 - 4\,320.a^3.b^3 + 4\,860.a^2.b^4 - 2\,916.a.b^5 + 729.b^6$   
2)  $924a^8$   
3) Šestý člen neobsahuje x.  
4) Koeficient 6. členu je -30 618.

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Mgr. Helena Košťálová

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje  
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

# Řešení:

1) Umocněte dvojčlen podle binomické věty:  $(2a - 3b)^6 =$

Binomická věta umožňuje umocnit dvojčlen na  $n$ -tou mocninu, kde  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

$$(a - b)^n = \binom{n}{0}a^n(-b)^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}(-b)^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}(-b)^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0(-b)^n$$

Kombinační číslo  $\binom{n}{k}$ , pro něž platí:  $n \geq 0$ ,  $k \geq 0$ ,  $n \geq k$ ; se vypočítá  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$  a nazývá se binomický koeficient.

Faktoriál čísla je definován pro přirozená čísla a nulu. Značí se  $n!$  a vypočítá se jako součin čísla  $n$  a všech čísel předcházejících až do 1.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Je definován  $0! = 1$

Zlomek s faktoriály řešíme rozkladem na součin, vytýkáním a krácením.

$$\begin{aligned}(2a - 3b)^6 &= \binom{6}{0}(2a)^6(-3b)^0 + \binom{6}{1}(2a)^5(-3b)^1 + \binom{6}{2}(2a)^4(-3b)^2 + \binom{6}{3}(2a)^3(-3b)^3 + \\ &+ \binom{6}{4}(2a)^2(-3b)^4 + \binom{6}{5}(2a)^1(-3b)^5 + \binom{6}{6}(2a)^0(-3b)^6 = \\ &= \frac{6!}{(6-0)!0!} \cdot 64 \cdot a^6 \cdot 1 - \frac{6!}{(6-1)!1!} \cdot 32 \cdot a^5 \cdot 3b + \frac{6!}{(6-2)!2!} \cdot 16a^4 \cdot 9b^2 - \frac{6!}{(6-3)!3!} \cdot 8a^3 \cdot 27b^3 + \frac{6!}{(6-4)!4!} \cdot 4a^2 \cdot 81b^4 - \\ &\frac{6!}{(6-5)!5!} \cdot 2a \cdot 243b^5 + \frac{6!}{(6-6)!6!} \cdot 1 \cdot 729b^6 = \\ &= 64 \cdot a^6 - 576 \cdot a^5 \cdot b + 15 \cdot 16 \cdot 9 \cdot a^4 \cdot b^2 - 20 \cdot 8 \cdot 27 \cdot a^3 \cdot b^3 + 15 \cdot 324 \cdot a^2 \cdot b^4 - 12 \cdot 243 \cdot a \cdot b^5 + 729 \cdot b^6 = \\ &= 64 \cdot a^6 - 576 \cdot a^5 \cdot b + 2 \cdot 160 \cdot a^4 \cdot b^2 - 4 \cdot 320 \cdot a^3 \cdot b^3 + 4 \cdot 860 \cdot a^2 \cdot b^4 - 2 \cdot 916 \cdot a \cdot b^5 + 729 \cdot b^6\end{aligned}$$

---

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Mgr. Helena Košťálová

2) Určete prostřední člen binomického rozvoje výrazu:  $(a - \sqrt[3]{a})^{12}$ .

Binomická věta umožňuje umocnit dvojčlen na n-tou mocninu, kde  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

$$(a - b)^n = \binom{n}{0}a^n(-b)^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}(-b)^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}(-b)^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0(-b)^n$$

Kombinační číslo  $\binom{n}{k}$ , pro něž platí:  $n \geq 0$ ,  $k \geq 0$ ,  $n \geq k$ ; se vypočítá  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$  a nazývá se binomický koeficient.

Binomický rozvoj výrazu  $(a + b)^n$  má  $n + 1$  členů.

Faktoriál čísla je definován pro přirozená čísla a nulu. Značí se  $n!$  a vypočítá se jako součin čísla  $n$  a všech čísel předcházejících až do 1.

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Je definován  $0! = 1$

Zlomek s faktoriály řešíme rozkladem na součin, vytýkáním a krácením.

$$\begin{aligned} \text{Výraz } (a - \sqrt[3]{a})^{12} \text{ má 13 členů, prostřední člen je sedmý člen} &\rightarrow \binom{12}{6}a^6 \cdot (-\sqrt[3]{a})^6 = \frac{12!}{(12-6)!6!} \cdot a^6 \cdot a^2 \\ &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!} \cdot a^8 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!} \cdot a^8 = 22 \cdot 3 \cdot 14 \cdot a^8 = 924 \cdot a^8 \end{aligned}$$

### 3) Kolikátý člen binomického rozvoje výrazu $\left(x^5 + \frac{2}{x^2}\right)^7$ neobsahuje x?

Binomická věta umožňuje umocnit dvojčlen na n-tou mocninu, kde  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

$$(a - b)^n = \binom{n}{0}a^n (-b)^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}(-b)^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}(-b)^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0 (-b)^n$$

Kombinační číslo  $\binom{n}{k}$ , pro něž platí:  $n \geq 0$ ,  $k \geq 0$ ,  $n \geq k$ ; se vypočítá  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$  a nazývá se binomický koeficient.

Binomický rozvoj výrazu  $(a + b)^n$  má  $n + 1$  členů.

Faktoriál čísla je definován pro přirozená čísla a nulu. Značí se  $n!$  a vypočítá se jako součin čísla  $n$  a všech čísel předcházejících až do 1.

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Je definován  $0! = 1$

Zlomek s faktoriály řešíme rozkladem na součin, vytýkáním a krácením.

Tento hledaný člen, který neobsahuje x, bude vlastně obsahovat  $x^0$ .

Výraz  $\left(x^5 + \frac{2}{x^2}\right)^7$  obsahuje v některém členu rozvoje  $x^0$ , koeficient tohoto členu není pro tento výpočet důležitý, můžeme ho vynechat. Budeme počítat  $(k + 1)$ . člen.

$$\begin{array}{l} \text{Sestavíme rovnici: } x^{5 \cdot (7-k)} \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^k = x^0 \rightarrow x^{35-5k} \cdot \frac{2^k}{x^{2k}} = x^0 \rightarrow 2^k \text{ můžeme} \\ \text{při výpočtu vynechat: } x^{35-5k} \cdot x^{-2k} = x^0 \rightarrow x^{35-7k} = x^0 \rightarrow 35-7k=0 \\ 7k=35 \rightarrow k=5 \end{array}$$

$$k + 1 = 5 + 1 = 6$$

Šestý člen neobsahuje x.

4) Určete koeficient 6. členu rozvoje výrazu  $\left(a^3 - \frac{3}{a}\right)^9$ .

Binomická věta umožňuje umocnit dvojčlen na n-tou mocninu, kde  $n \in \mathbb{N}_0$ :

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

$$(a - b)^n = \binom{n}{0}a^n(-b)^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}(-b)^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}(-b)^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0(-b)^n$$

Kombinační číslo  $\binom{n}{k}$ , pro něž platí:  $n \geq 0$ ,  $k \geq 0$ ,  $n \geq k$ ; se vypočítá  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$  a nazývá se binomický koeficient.

Binomický rozvoj výrazu  $(a + b)^n$  má  $n + 1$  členů.

Faktoriál čísla je definován pro přirozená čísla a nulu. Značí se  $n!$  a vypočítá se jako součin čísla  $n$  a všech čísel předcházejících až do 1.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Je definován  $0! = 1$

Zlomek s faktoriály řešíme rozkladem na součin, vytýkáním a krácením.

$$\begin{aligned} (a^3 - \frac{3}{a})^9: \text{koeficient 6. členu určíme přímo z 6. členu} &\rightarrow \binom{9}{5} \cdot (a^3)^{9-5} \cdot \left(-\frac{3}{a}\right)^5 = = \\ - \frac{9!}{(9-5)!5!} \cdot a^{12} \cdot \frac{3^5}{a^5} &\rightarrow \text{mocniny čísla a můžeme vynechat a počítat jenom koeficient} \rightarrow \\ \rightarrow - \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5!} \cdot 3^5 = - \frac{9 \cdot 7 \cdot 2}{1} \cdot 243 = -126 \cdot 243 = -30\,618. \end{aligned}$$

Koeficient 6. členu je -30 618.