



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obecná rovnice elipsy

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Mgr. Helena Košťálová

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Zadání:

- 1) Určete souřadnice středu, poloosy a excentricitu elipsy:

$$6x^2 + 9y^2 - 54 = 0.$$

- 2) Určete obecný tvar rovnice elipsy:

$$\frac{(x-2)^2}{6} + \frac{(y+4)^2}{8} = 1.$$

- 3) Určete souřadnice středu, poloosy a excentricitu elipsy:

$$x^2 + 2y^2 + 10x - 12y + 41 = 0.$$

- 4) Určete obecnou rovnici elipsy, je-li dáno ohnisko $F[0; -4]$, střed $S[0; 0]$, $b = 2$.

Výsledky: 1) $S[0; 0]$, $a = 3$, $b = \sqrt{6}$, $e = \sqrt{3}$

2) Obecná rovnice elipsy: $4x^2 + 3y^2 - 16x + 24y + 40 = 0$

3) $S[-5; 3]$, $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, $e = 1$

4) Obecná rovnice elipsy: $5x^2 + y^2 - 20 = 0$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Mgr. Helena Košťálová

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Řešení:

1) Určete souřadnice středu, poloosy a excentricitu elipsy:

$$6x^2 + 9y^2 - 54 = 0.$$

Obecná rovnice elipsy má tvar: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$.

Středová rovnice elipsy se středem v bodě $S[0; 0]$, je-li hlavní osa $o = x$, má rovnici:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, kde a je hlavní poloosa elipsy, b vedlejší poloosa elipsy. Vzdálenost středu S a ohniska F je excentricita e . Platí vztah: $a^2 = b^2 + e^2$.

Obecnou rovnici úpravami převedeme na středový tvar:

$$6x^2 + 9y^2 - 54 = 0 \rightarrow \frac{6x^2}{54} + \frac{9y^2}{54} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1, a^2 = 9, a = 3, b^2 = 6, b = \sqrt{6},$$
$$a^2 = b^2 + e^2 \rightarrow 9 = 6 + e^2 \rightarrow e^2 = 9 - 6 = 3 \rightarrow e = \sqrt{3}$$

$$S[0; 0], a = 3, b = \sqrt{6}, e = \sqrt{3}$$

2) Určete obecný tvar rovnice elipsy:

$$\frac{(x-2)^2}{6} + \frac{(y+4)^2}{8} = 1.$$

Středová rovnice elipsy se středem v bodě $S[m; n]$, je-li hlavní osa o rovnoběžná s osou y , má rovnici:

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1, \text{ kde } a \text{ je hlavní poloosa elipsy, } b \text{ vedlejší poloosa elipsy.}$$

Obecná rovnice elipsy má tvar: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$.

Středovou rovnici postupnými úpravami převedeme na obecnou rovnici:

$$\frac{(x-2)^2}{6} + \frac{(y+4)^2}{8} = 1; \text{ vynásobíme společným jmenovatelem 24:}$$

$$4 \cdot (x-2)^2 + 3 \cdot (y+4)^2 = 24; \text{ umocníme závorky a roznásobíme:}$$

$$4x^2 - 16x + 16 + 3y^2 + 24y + 48 = 24; \text{ upravíme na tvar obecné rovnice:}$$

$$\text{Obecná rovnice elipsy: } 4x^2 + 3y^2 - 16x + 24y + 40 = 0$$

3) Určete souřadnice středu, poloosy a excentricitu elipsy:

$$x^2 + 2y^2 + 10x - 12y + 41 = 0.$$

Obecná rovnice elipsy má tvar: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$.

Postupnými úpravami převedeme na středový tvar:

$$x^2 + 10x + 25 + 2(y^2 - 6y + 9) = 25 + 18 - 41$$

$$(x + 5)^2 + 2(y - 3)^2 = 43 - 41$$

$$(x + 5)^2 + 2(y - 3)^2 = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{(x + 5)^2}{2} + \frac{(y - 3)^2}{1} = 1$$

Středová rovnice elipsy se středem v bodě $S[m; n]$, je-li hlavní osa o rovnoběžná s osou x, má

rovnici: $\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$, kde a je hlavní poloosa elipsy, b vedlejší poloosa elipsy.

Hlavní poloosa a je rovnoběžná s osou x, vzdálenost středu S a ohniska F je excentricita e.

Platí vztah: $a^2 = b^2 + e^2$.

$$S[-5; 3], a^2 = 2 \rightarrow a = \sqrt{2}, b^2 = 1 \rightarrow b = 1$$

$$e^2 = 2 - 1 = 1$$

$$e = 1$$

4) Určete obecnou rovnici elipsy, je-li dáno ohnisko $F[0; -4]$, střed $S[0; 0]$, $b = 2$.

Nejprve určíme středovou rovnici, kterou převedeme na obecnou rovnici.

Středová rovnice elipsy se středem v bodě $S[0; 0]$, je-li hlavní osa o = y, má rovnici:

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, kde a je hlavní poloosa elipsy, b vedlejší poloosa elipsy. Vzdálenost středu S a ohniska F je excentricita e. Platí vztah: $a^2 = b^2 + e^2$.

Obecná rovnice elipsy má tvar: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$.

$$F[0; -4], \text{ střed } S[0; 0] \quad \rightarrow \quad e = 4, b = 2 \quad \rightarrow \quad a^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20;$$
$$a = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Středová rovnice elipsy: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{20} = 1$$

$$\text{odstraníme zlomky: } 5x^2 + y^2 = 20 \quad \rightarrow \quad 5x^2 + y^2 - 20 = 0$$

$$\text{Obecná rovnice elipsy: } 5x^2 + y^2 - 20 = 0$$