



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pravděpodobnostní jevy

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Mgr. Helena Košťálová

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Zadání:

- 1) Jaká je pravděpodobnost, že při hození kostkou nepadne číslo větší než 4?
- 2) V osudí je 10 kuliček bílých a 15 modrých. Náhodně vybereme 5 kuliček, jaká je pravděpodobnost, že vybereme právě 3 bílé a 2 modré kuličky?
- 3) Ve sportovním oddíle je 15 chlapců a 5 děvčat. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybrané čtyřčlenné hlídce budou nejvýše 2 chlapci?
- 4) Žák 4. ročníku je připraven k maturitní zkoušce tak, že CEJ (český jazyk) ovládá na 82%, ANJ (anglický jazyk) na 79%, FYZ (fyziku) na 91% a ODP (odborný předmět) na 97%.
 - a) Jaká je pravděpodobnost, že prospěje ze všech předmětů?
 - b) Jaká je pravděpodobnost, že ze všech předmětů neprospěje?
 - c) Jaká je pravděpodobnost, že neprospěje pouze z ODP?

Výsledky:

- 1) 67%
- 2) 23,7%
- 3) 24,87%
- 4) a) 57%
- b) 0,01%
- c) 1,77%

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Mgr. Helena Košťálová

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Řešení:

1) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou nepadne číslo větší než 4?

Pravděpodobnost jevu A značíme $P(A) = \frac{m_A}{m}$, což znamená, že počet všech výsledků m_A příznivých danému jevu A dělíme počtem všech možných výsledků m náhodného jevu.

Při hodu kostkou může padnout šest čísel: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Jestliže nesmí padnout číslo větší než 4, může padnout 4, 3, 2, 1, to znamená čtyři čísla.

Pravděpodobnost tohoto jevu bude: $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0,\overline{6} \doteq 0,67 \rightarrow 67\%$

Pravděpodobnost toho, že při hodu kostkou nepadne číslo větší než 4, je 67%.

2) V osudí je 10 kuliček bílých a 15 modrých. Náhodně vybereme 5 kuliček, jaká je pravděpodobnost, že vybereme právě 3 bílé a 2 modré kuličky?

Pravděpodobnost jevu A značíme $P(A) = \frac{m_A}{m}$, což znamená, že počet všech výsledků m_A příznivých danému jevu A dělíme počtem všech možných výsledků m náhodného jevu.

Kombinace k -té třídy z n prvků zapisujeme $K(k, n)$, což znamená, že tvoříme neuspořádané k -tice z n prvků (nezáleží na pořadí). Kombinace se dají zapsat také kombinačním číslem $\binom{n}{k}$. Pro kombinační číslo platí: $n \geq 0, k \geq 0, n \geq k$.

Kombinace se vypočítají se podle vzorce: $K(k, n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Faktoriál čísla je definován pro přirozená čísla a nulu. Značí se $n!$ a vypočítá se jako součin čísla n a všech čísel předcházejících až do 1.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Je definován $0! = 1$

Zlomek s faktoriály řešíme rozkladem na součin, vytýkáním a krácením.

Počet všech možných výsledků náhodného jevu je $m = \binom{25}{5}$. Jedná se o kombinace páté třídy z 25 prvků. Vybíráme neuspořádanou pěticí.

Počet výsledků příznivých jevu je $m_A = \binom{10}{3} \cdot \binom{15}{2}$. Při výběru 5 kuliček budou vybrány 3 kuličky bílé z 10 a 2 kuličky modré z 15. Dvojice i trojice budou neuspořádané, budeme tvořit kombinace třetí třídy z 10 prvků a kombinace druhé třídy z 15 prvků. Ke každé možnosti výběru bílých kuliček budou patřit všechny možnosti výběru modrých kuliček. Platí zde kombinatorické pravidlo součinu.

$$P(A) = \frac{\binom{10}{3} \cdot \binom{15}{2}}{\binom{25}{5}} = \frac{\frac{10!}{3!7!} \cdot \frac{15!}{2!13!}}{\frac{25!}{5!20!}} = \frac{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{13! \cdot 2!}}{\frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20!}{20! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 7}{5 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21} = \frac{4 \cdot 15}{23 \cdot 11} = \frac{60}{253} = 0,237 \rightarrow 23,7\%$$

Pravděpodobnost, že vybereme právě 3 bílé a 2 modré kuličky, je 23,7%.

3) Ve sportovním oddíle je 15 chlapců a 5 děvčat. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybrané čtyřčlenné hlídce budou nejvýše 2 chlapci?

Nejvýše dva chlapci v hlídce znamená, že v hlídce buď nebude žádný chlapec, nebo v ní bude jeden chlapec, nebo dva chlapci. Zbytek hlídky tvoří děvčata.

Výsledná pravděpodobnost bude tvořena součtem pravděpodobností těchto tří jevů.

Pravděpodobnost jevu A značíme $P(A) = \frac{m_A}{m}$, což znamená, že počet všech výsledků m_A příznivých danému jevu A dělíme počtem všech možných výsledků m náhodného jevu.

Kombinace k -té třídy z n prvků zapisujeme $K(k, n)$, což znamená, že tvoříme neuspořádané k -tice z n prvků (nezáleží na pořadí). Kombinace se dají zapsat také kombinačním číslem $\binom{n}{k}$. Pro kombinační číslo platí: $n \geq 0, k \geq 0, n \geq k$.

Kombinace se vypočítají se podle vzorce: $K(k, n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Faktoriál čísla je definován pro přirozená čísla a nulu. Značí se $n!$ a vypočítá se jako součin čísla n a všech čísel předcházejících až do 1.

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

Je definován $0! = 1$

Zlomek s faktoriály řešíme rozkladem na součin, vytýkáním a krácením.

Jev A: v hlídce není chlapec, pouze děvčata.

m_A : chlapce nevybíráme, vybíráme neuspořádanou čtveřici z pěti děvčat $\rightarrow \binom{15}{0} \cdot \binom{5}{4}$

m : počet všech nespořádaných čtveřic ze všech členů sportovního oddílu $\rightarrow \binom{20}{4}$

$$P(A) = \frac{\binom{15}{0} \cdot \binom{5}{4}}{\binom{20}{4}} = \frac{\frac{15!}{0! \cdot 15!} \cdot \frac{5!}{4! \cdot 1!}}{\frac{20!}{16! \cdot 4!}} = \frac{1 \cdot 5}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16!}{16! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}} = \frac{5}{\frac{5 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 17}{1}} = \frac{1}{19 \cdot 3 \cdot 17} = \frac{1}{969} = 0,001 \rightarrow 0,1\%$$

Jev B: v hlídce bude jeden chlapec a tři děvčata.

m_B : vybíráme jednoho chlapce z patnácti chlapců a k němu vybíráme neuspořádanou trojici z pěti děvčat $\rightarrow \binom{15}{1} \cdot \binom{5}{3}$

m : počet všech nespořádaných čtveřic ze všech členů sportovního oddílu $\rightarrow \binom{20}{4}$

$$P(B) = \frac{\binom{15}{1} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{20}{4}} = \frac{\frac{15!}{14! \cdot 1!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!}}{\frac{20!}{16! \cdot 4!}} = \frac{\frac{15 \cdot 14! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{14! \cdot 1 \cdot 3! \cdot 2}}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16!}{16! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}} = \frac{\frac{15 \cdot 5 \cdot 2}{1}}{\frac{5 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 17}{1}} = \frac{15 \cdot 10}{5 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 17} = \frac{10}{19 \cdot 17} = \frac{10}{323} = 0,031 \rightarrow 3,1\%$$

Jev C: v hlídce budou dva chlapci a dvě děvčata.

m_C : vybíráme neuspořádanou dvojici chlapců z patnácti chlapců a k nim vybíráme neuspořádanou dvojici dívek z pěti děvčat $\rightarrow \binom{15}{2} \cdot \binom{5}{2}$

m : počet všech nespořádaných čtveřic ze všech členů sportovního oddílu $\rightarrow \binom{20}{4}$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Mgr. Helena Košťálová

$$P(C) = \frac{\binom{15}{2} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{\frac{15!}{2! \cdot 13!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!}}{\frac{20!}{4! \cdot 16!}} = \frac{\frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{2! \cdot 13!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!}}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16!}{4! \cdot 16!}} = \frac{15 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2}{\frac{5 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 17}{1}} = \frac{7 \cdot 10}{19 \cdot 17} = \frac{70}{323} = 0,2167 \rightarrow 21,67 \%$$

$$P(A) + P(B) + P(C) = 0,001 + 0,031 + 0,2167 = 0,2487 \rightarrow 24,87\%$$

Pravděpodobnost, že v náhodně vybrané hlídce budou nejvýše dva chlapci, je 24,87%.

4) Žák 4. ročníku je připraven k maturitní zkoušce tak, že CEJ (český jazyk) ovládá na 82%, ANJ (anglický jazyk) na 79%, FYZ (fyziku) na 91% a ODP (odborný předmět) na 97%.

- Jaká je pravděpodobnost, že prospěje ze všech předmětů?
- Jaká je pravděpodobnost, že ze všech předmětů neprospěje?
- Jaká je pravděpodobnost, že neprospěje pouze z ODP?

Pravděpodobnost daného jevu a jevu k němu opačnému je rovna 1.

Ovládnutí učiva z určitého předmětu:

jev A → CEJ; P(A) = 0,82	A' jev opačný → P(A') = 0,18
jev B → ANJ; P(B) = 0,79	B' jev opačný → P(B') = 0,21
jev C → FYZ; P(C) = 0,91	C' jev opačný → P(C') = 0,09
jev D → ODP; P(D) = 0,97	D' jev opačný → P(D') = 0,03

Jedná se o pravděpodobnost vzájemně nezávislých jevů. Výsledná pravděpodobnost je dána součinem jednotlivých pravděpodobností.

a) Pravděpodobnost, že žák prospěje ze všech předmětů, pravděpodobnost jevu E:

$$P(E) = 0,82 \cdot 0,79 \cdot 0,91 \cdot 0,97 = 0,57181306 \doteq 0,57 \rightarrow 57\%$$

Pravděpodobnost, že žák prospěje ze všech předmětů, je 57%.

b) Pravděpodobnost, že žák ze všech předmětů neprospěje, pravděpodobnost jevu F:

$$P(F) = 0,18 \cdot 0,21 \cdot 0,09 \cdot 0,03 = 0,00010206 \doteq 0,0001 \rightarrow 0,01\%$$

Pravděpodobnost, že žák ze všech předmětů neprospěje, je 0,01%.

c) Pravděpodobnost, že žák neprospěje pouze z ODP, pravděpodobnost jevu G:

$$P(G) = 0,82 \cdot 0,79 \cdot 0,91 \cdot 0,03 = 0,589498 \cdot 0,03 = 0,01768494 \doteq 0,0177 \rightarrow 1,77\%$$

Pravděpodobnost, že žák neprospěje pouze z ODP, je 1,77%.