



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Středová rovnice hyperboly

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Mgr. Helena Košťálová

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Zadání:

- 1) Určete středovou rovnici hyperboly, je-li dáno: $S[0; 0]$, $F_1[0; -4]$, $a = 3$.
- 2) Určete středovou rovnici hyperboly, je-li dáno: $S[1; -2]$, $F_1[-4; -2]$, $a = 4$.
- 3) Určete středovou rovnici hyperboly, je-li dáno: $S[-3; 0]$, $a = 4$, bod hyperboly $K[2; -4]$, o_1 je rovnoběžná s osou x .
- 4) Určete souřadnice středu, souřadnice ohnisek, poloosy, excentricitu a rovnice asymptot hyperboly, která je dána středovou rovnicí:

$$\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$$

Výsledky: 1) Středová rovnice hyperboly: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$

2) Středová rovnice hyperboly: $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

3) Středová rovnice hyperboly: $\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{9y^2}{256} = 1$

4) $S[3; -2]$, $F_1[3 - 3\sqrt{2}; -2]$, $F_2[3 + 3\sqrt{2}; -2]$, $a = b = 3$, $e = 3\sqrt{2}$,
 $y_1 = x - 5$, $y_2 = -x + 1$

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Mgr. Helena Košťálová

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Řešení:

1) Určete středovou rovnici hyperboly, je-li dáno: $S[0; 0]$, $F_1[0; -4]$, $a = 3$.

Ohnisko $F_1[0; -4]$ leží na ose y , potom má hyperbola středovou rovnici: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, vzdálenost středu a ohniska je rovna excentricitě, $e = 4$.

Pro poloosu a , b , excentricitu e platí vztah: $e^2 = a^2 + b^2$. Odtud vypočteme vedlejší poloosu b , dosadíme do rovnice hyperboly.

$$e^2 = a^2 + b^2 \quad \rightarrow \quad 16 = 9 + b^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = 16 - 9 \quad \rightarrow \quad b^2 = 7 \quad \rightarrow \quad b = \sqrt{7}$$

Středová rovnice hyperboly: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$.

2) Určete středovou rovnici hyperboly, je-li dáno: $S[1; -2]$, $F_1[-4; -2]$, $a = 4$.

Osa o hyperboly je rovnoběžná s osou x , potom má hyperbola středovou rovnici:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Vzdálenost středu a ohniska je rovna excentricitě, dle x -ových souřadnic středu a ohniska:

$$e = 1 - (-4) = 5, e = 5.$$

Pro poloosu a , b , excentricitu e platí vztah: $e^2 = a^2 + b^2$. Odtud vypočteme vedlejší poloosu b , dosadíme do rovnice hyperboly.

$$e^2 = a^2 + b^2 \quad \rightarrow \quad 25 = 16 + b^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = 25 - 16 \quad \rightarrow \quad b^2 = 9 \quad \rightarrow \quad b = 3$$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

Středová rovnice hyperboly: $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$.

- 3) Určete středovou rovnici hyperboly, je-li dáno: $S[-3; 0]$, $a = 4$, bod hyperboly $K[2; -4]$, o_1 je rovnoběžná s osou x .

Osa o hyperboly je rovnoběžná s osou x , střed $S[m; n]$, hyperbola má středovou rovnici:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Leží-li bod K na hyperbole, vyhovují jeho souřadnice rovnici hyperboly.

Do rovnice dosadíme souřadnice středu S za m, n , za x, y souřadnice bodu K , hlavní poloosu a , vypočítáme odtud poloosu b . Vypočtené údaje dosadíme do středové rovnice.

$$\frac{(2+3)^2}{16} - \frac{(-4)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{25}{16} - \frac{16}{b^2} = 1 \rightarrow 25b^2 - 256 = 16b^2 \rightarrow 9b^2 = 256$$

$$b^2 = \frac{256}{9} \rightarrow b = \frac{16}{3}$$

$$\text{dosadíme do středové rovnice: } \frac{(x+3)^2}{16} - \frac{y^2}{\frac{256}{9}} = 1 \rightarrow \frac{(x+3)^2}{16} - \frac{9y^2}{256} = 1$$

$$\text{Středová rovnice hyperboly: } \frac{(x+3)^2}{16} - \frac{9y^2}{256} = 1.$$

- 4) Určete souřadnice středu, souřadnice ohnisek, poloosy, excentricitu a rovnice asymptot hyperboly, která je dána středovou rovnicí:

$$\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$$

Středová rovnice hyperboly $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$. Střed $S[m; n]$, a hlavní poloosa, b vedlejší poloosa, je-li $a = b$, potom je hyperbola rovnoosá. Vzdálenost středu a ohniska je rovna excentricitě. Pro poloosy a, b , excentricitu e platí vztah: $e^2 = a^2 + b^2$.

Osa o_1 je rovnoběžná s osou x .

Asymptoty jsou přímky, které procházejí středem hyperboly a nemají s hyperbolou žádný společný bod.

$$\text{Rovnice asymptot rovnoosé hyperboly: } (y_1 - n) = \frac{a}{a} (x - m); (y_2 - n) = -\frac{a}{a} (x - m)$$

$$a = b = 3$$

$$e^2 = 3^2 + 3^2 \rightarrow e^2 = 18 \rightarrow e = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$e = 3\sqrt{2}$$

$$S[3; -2], F_1[3 - 3\sqrt{2}; -2], F_2[3 + 3\sqrt{2}; -2]$$

$$y_1 + 2 = 1 \cdot (x - 3) \rightarrow y_1 = x - 5$$

$$y_2 + 2 = -1 \cdot (x - 3) \rightarrow y_2 = -x + 1$$