



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vektor, početní operace s vektory

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Mgr. Helena Košťálová

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Zadání:

- 1) Jsou dané vektory kolineární? Jestliže ano, určete poměr k .
 - a) $\mathbf{u} = (-2; 2,5)$ $\mathbf{v} = (4; -5)$
 - b) $\mathbf{s} = (-4; -1,5)$ $\mathbf{t} = (2,5; 1)$
 - c) $\mathbf{w} = (0,75; -5)$ $\mathbf{z} = (-0,6; 4)$
- 2) Jsou dané vektory kolmé? Ověřte výpočtem.
 - a) $\mathbf{u} = (6; -10)$ $\mathbf{v} = (-5; -3)$
 - b) $\mathbf{u} = (2; 2)$ $\mathbf{v} = (3; 0)$
 - c) $\mathbf{u} = (-2; \sqrt{2})$ $\mathbf{v} = (2\sqrt{2}; 4)$
- 3) Jsou dány vektory: $\mathbf{u} = (-2; 2)$ a $\mathbf{v} = (-4; 0)$. Vypočtěte, jaký úhel svírají.
- 4) Jsou dány body $A[-1; 4]$, $B[2; 2]$, $C[0; 2]$, $D[-4; 0]$.
Určete velikost vektoru $\mathbf{u} = 2\mathbf{AB} - \mathbf{CD} + 3\mathbf{CB}$.

Výsledky:

1) a) vektory jsou kolineární $\rightarrow k = \frac{-1}{2}$	b) vektory nejsou kolineární
c) vektory jsou kolineární $\rightarrow k = \frac{-5}{4}$	
2) a) vektory jsou kolmé	b) vektory nejsou kolmé
c) vektory jsou kolmé	
3) $\varphi = 45^\circ$	
4) $ \mathbf{u} = 2 \cdot \sqrt{65}$	

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Mgr. Helena Košťálová

Materiál je dostupný ze školního portálu <http://dum.voss-na.cz>, který provozuje
Vyšší odborná škola stavební a Střední průmyslová škola stavební arch. Jana Letzela, Náchod

Řešení:

1) Jsou dané vektory kolineární? Jestliže ano, určete poměr k .

- a) $\mathbf{u} = (-2; 2,5)$ $\mathbf{v} = (4; -5)$
b) $\mathbf{s} = (-4; -1,5)$ $\mathbf{t} = (2,5; 1)$
c) $\mathbf{w} = (0,75; -5)$ $\mathbf{z} = (-0,6; 4)$

Kolineární vektory jsou takové, které leží na jedné přímce nebo na rovnoběžných přímkách:

$\mathbf{u} = k \cdot \mathbf{v}$ (jeden vektor je reálným násobkem druhého vektoru),

$k \in \mathbb{R}, k \neq 0; \mathbf{u} = (u_1, u_2), \mathbf{v} = (v_1, v_2)$

podmínka pro kolineárnost vektorů: $u_1 = k \cdot v_1$ a zároveň $u_2 = k \cdot v_2$,

pro k platí: $k = \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} \rightarrow u_1 \cdot v_2 = u_2 \cdot v_1$

a) $-2 \cdot (-5) = 2,5 \cdot 4$

$$10 = 10$$

jsou kolineární

$$\rightarrow k = \frac{-2}{4} = \frac{2,5}{-5} = \frac{-1}{2}$$

b) $-4 \cdot 1 \neq -1,5 \cdot 2,5$

$$-4 \neq 3,75$$

nejsou kolineární

c) $0,75 \cdot 4 = -5 \cdot (-0,6)$

$$3 = 3$$

jsou kolineární

$$\rightarrow k = \frac{0,75}{-0,6} = \frac{-2,5}{2} = \frac{-5}{4}$$

2) Jsou dané vektory kolmé? Ověřte výpočtem.

- a) $\mathbf{u} = (6; -10)$ $\mathbf{v} = (-5; -3)$
b) $\mathbf{u} = (2; 2)$ $\mathbf{v} = (3; 0)$
c) $\mathbf{u} = (-2; \sqrt{2})$ $\mathbf{v} = (2\sqrt{2}; 4)$

Jsou dány vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$

Pro kolmé vektory platí, skalární součin vektorů je roven nule:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \rightarrow u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 0$$

a) $6 \cdot (-5) + (-10) \cdot (-3) = 0$

$$-30 + 30 = 0$$

vektory jsou kolmé

b) $2 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \neq 0$

$$6 \neq 0$$

vektory nejsou kolmé

c) $-2 \cdot 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot 4 = 0$

$$-4 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{2} = 0$$

vektory jsou kolmé

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Mgr. Helena Košťálová

3) Jsou dány vektory: $\mathbf{u} = (-2; 2)$ a $\mathbf{v} = (-4; 0)$. Vypočtěte, jaký úhel svírají.

Vzorec pro velikost úhlu dvou vektorů:

$$\cos \varphi = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{-2 \cdot (-4) + 2 \cdot 0}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 0^2}} = \frac{8}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{16}} = \frac{8}{2\sqrt{2} \cdot 4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = 45^\circ$$

4) Jsou dány body A[-1; 4], B[2; 2], C[0; 2], D[-4; 0].

Určete velikost vektoru $\mathbf{u} = 2\mathbf{AB} - \mathbf{CD} + 3\mathbf{CB}$.

Vzorec pro výpočet souřadnic vektoru:

$$A[x_A; y_A], B[x_B; y_B]$$

$$\mathbf{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Násobení vektoru reálným číslem: $a \in \mathbb{R}; \mathbf{u} = (u_1, u_2); \rightarrow a \cdot \mathbf{u} = (au_1, au_2)$.

Sčítání vektorů: $\mathbf{u} = (u_1, u_2); \mathbf{v} = (v_1, v_2) \rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$.

Odčítání vektorů: $\mathbf{u} = (u_1, u_2); \mathbf{v} = (v_1, v_2) \rightarrow \mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2)$.

Velikost vektoru: $\mathbf{u} = (u_1, u_2); |\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

$$\mathbf{u} = 2 \cdot (2 - (-1); 2 - 4) - (-4 - 0; 0 - 2) + 3 \cdot (2 - 0; 2 - 2) = 2 \cdot (3; -2) - (-4; -2) + 3 \cdot (2; 0) = (6; -4) + (4; 2) + (6; 0) = (16; -2)$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{16^2 + (-2)^2} = \sqrt{256 + 4} = \sqrt{260} = 2 \cdot \sqrt{65}$$

$$|\mathbf{u}| = 2 \cdot \sqrt{65}$$